55. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

550811

Mathematicus stellt seine Zinnsoldaten zu einer Parade auf. Wenn die Zinnsoldaten in Zweierreihen stehen, bleibt ein Soldat übrig. Beim Aufstellen in Dreierreihen bleiben 2 Soldaten, beim Aufstellen in Viererreihen bleiben 3 Soldaten übrig. Erst die Anordnung in Fünferreihen ergibt eine Parade aller vorhandenen Soldaten.

Bestimme die Anzahl der Zinnsoldaten, die Mathematicus mindestens besitzt.

550812

Herr Meyer hatte sich verpflichtet, ein Darlehen in vier Raten zu tilgen. Vereinbarungsgemäß zahlte er zum ersten Termin den vierten Teil seiner Schuld und noch 50 Euro. Beim zweiten Termin tilgte er von der Restschuld den fünften Teil und noch 60 Euro. Beim dritten Termin bezahlte Herr Meyer von der nun verbliebenen Restschuld die Hälfte und noch 50 Euro. Mit dem vierten Termin konnte er durch den Restbetrag von 200 Euro seine Schulden vollständig begleichen.

Berechne das ursprüngliche Darlehen von Herrn Meyer.

Bemerkung: Bei der Tilgung dieses Darlehens fielen keinerlei zusätzliche Kosten an.

550813

Lehrer Pfiffig gibt den Freunden Anton, Bernd, Claus, Daniel und Eugen jeweils mindestens eine Münze und teilt ihnen mit: Anton hat weniger Münzen als Bernd bekommen, Bernd weniger Münzen als Claus, Claus weniger Münzen als Daniel und Daniel hat weniger Münzen als Eugen bekommen. Schließlich nennt Lehrer Pfiffig den Freunden die Gesamtanzahl n der Münzen.

Ermittle die kleinste Zahl n, zu der es eine Verteilung gibt, bei der keiner der Freunde aus diesen Angaben eindeutig herausfinden kann, wie viele Münzen die einzelnen Freunde erhalten haben.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

550814

Ein Kreis k hat den Mittelpunkt M und die Radiuslänge r. Der Punkt A ist ein Punkt außerhalb des Kreises. Von A sollen die Tangenten an k gelegt werden. Man führt dazu die folgende Konstruktion durch:

(K1) Zeichne den Kreis k_1 um M mit der Radiuslänge $2r$.

(K2) Zeichne den Kreis k_2 um A mit der Radiuslänge $|AM|$. Benenne die Schnittpunkte der Kreise k_1 und k_2 mit P und Q.

(K3) Konstruiere die Mittelsenkrechten m_{MP} und m_{MQ} der Strecken $\overline{MP}$ und $\overline{MQ}$.

Die Geraden m_{MP} und m_{MQ} sind dann die beiden gesuchten Tangenten.

a) Beweise, dass die so konstruierten Geraden m_{MP} und m_{MQ} tatsächlich die durch A verlaufenden Tangenten an den Kreis k sind.

b) Untersuche, ob diese Konstruktion stets durchführbar ist.

c) Führe die Konstruktion für die Radiuslänge $r = 3\,\text{cm}$ und die Streckenlänge $|AM| = 7\,\text{cm}$ durch.

d) Informiere dich, ob es weitere Konstruktionsmöglichkeiten gibt. Führe eine dieser Konstruktionen durch und beschreibe sie.

55. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklassen 9 und 10
Aufgaben

Hinweise: 1. *Für die Jahrgangsstufen 9 und 10 stehen in der ersten Runde insgesamt sechs Aufgaben zur Verfügung, aus denen die Verantwortlichen vor Ort eine geeignete Auswahl treffen können. Wenn die erste Runde als Hausaufgabenwettbewerb durchgeführt wird, kann die Wahl von vier der sechs Aufgaben auch den Teilnehmenden überlassen werden.*

2. *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

551011

a) Weisen Sie nach, dass es eine natürliche Zahl $a > 1$ gibt, für die der Term

$$82 \cdot \left(a^8 - a^4\right)$$

durch das Produkt von drei aufeinanderfolgenden und mindestens zweistelligen natürlichen Zahlen teilbar ist.

b) Bestimmen Sie die kleinste mindestens zweistellige Primzahl a, für die

$$82 \cdot \left(a^8 - a^4\right)$$

durch das Produkt von drei aufeinanderfolgenden und mindestens zweistelligen natürlichen Zahlen teilbar ist.

c) Der obige Term wird jetzt durch $82 \cdot (a^8 - a^2)$ ersetzt.
Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl $a > 1$, für die dieser Term durch das Produkt von drei aufeinanderfolgenden und mindestens zweistelligen natürlichen Zahlen teilbar ist.

551012

Beweisen Sie: Wenn in einem Dreieck ABC die Beziehung $|\sphericalangle ACB| = 3 \cdot |\sphericalangle BAC|$ gilt, dann lässt sich dieses Dreieck in zwei nicht kongruente gleichschenklige Teildreiecke zerlegen.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

551013

In einem rechtwinkligen (x, y)-Koordinatensystem sind die Punkte $A(0,0)$, $B(b,0)$, $C(b,c)$ und $D(0,d)$ mit positiven reellen Zahlen b, c, d gegeben. Es sei E der Schnittpunkt der Geraden AC und BD. Mit F wird der Fußpunkt des Lotes von E auf die Gerade AB bezeichnet.

a) Bestimmen Sie für $b = 5$, $c = 3$ und $d = 6$ die Länge der Strecke $\overline{EF}$.

b) Wählt man aus den Punkten A, B, C, D, E und F jeweils drei Punkte aus, die nicht auf einer Geraden liegen, so erhält man ein Dreieck. Nennen Sie drei verschiedene Paare ähnlicher Dreiecke, die man auf diese Weise erhalten kann.

c) Zeigen Sie allgemein für beliebige positive reelle Werte von b, c und d, dass stets

$$|EF| = \frac{c \cdot d}{c + d}$$

gilt.

551014

a) Es sei $p(x) = a\,x^2 + b\,x + (a + b)$.
Weisen Sie nach, dass für $a = 2{,}5$ und $b = 0{,}5$ die Funktionswerte $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$ und $p(11)$ jeweils ganzzahlig sind.

b) Es sei $p(x) = a\,x^2 + b\,x + (a + b)$ mit rationalen Koeffizienten a und b. Ferner seien $p(0)$ und $p(-1)$ ganze Zahlen.
Zeigen Sie, dass $p(x)$ für jede ganze Zahl x ganzzahlig ist.

551015

Gegeben sind ein quaderförmiges Aquarium mit den folgenden Innenmaßen

$$\text{Länge} = 114\,\text{cm}, \text{ Breite} = 41\,\text{cm und Höhe} = 100\,\text{cm}$$

und weiterhin drei gleich große Eisenwürfel der Kantenlänge 40 cm.

In das Aquarium werden $180\,000\,\text{cm}^3$ (= 180 Liter) Wasser gefüllt. Kann man die Eisenwürfel so in das Aquarium legen, dass alle drei unter Wasser liegen?

551016

a) Jeder Punkt einer Ebene sei rot oder blau gefärbt. (Oder exakter formuliert: Jedem Punkt der Ebene wird entweder die Farbe Rot oder die Farbe Blau zugeordnet.)
Zeigen Sie, dass es in dieser Ebene stets zwei Punkte mit dem Abstand 1 gibt, die die gleiche Farbe haben.

b) Jeder Punkt einer Ebene sei in einer der drei Farben Rot, Gelb oder Blau gefärbt.
Zeigen Sie, dass es auch in dieser Ebene stets zwei Punkte mit dem Abstand 1 gibt, die die gleiche Farbe haben.

Bemerkung: Stellen Sie sich beispielsweise vor, dass aus farbigem Papier mikroskopisch kleines Konfetti ausgestanzt wird und dieses Konfetti so dicht auf einem Tisch ausgestreut wird, dass die Tischdecke vollständig mit farbigen Konfettistückchen überdeckt ist.

55. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklassen 11 und 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

551211

Gegeben ist das Gleichungssystem

$$2\,(z-1) - x = 55\,, \tag{1}$$
$$4xy - 8z = 12\,, \tag{2}$$
$$a\,(y+z) = 11\,. \tag{3}$$

Man bestimme die beiden größten reellen Werte für a, zu denen es positive ganze Zahlen x, y, z gibt, die das Gleichungssystem lösen.

Zu jeder dieser Lösungen bestimme man das Produkt xyz.

551212

Im alten Ägypten wurden Längen in der Einheit Königselle (*meh-nesut,* etwa 0,524 m) gemessen. Ein ägyptischer Pharao möchte eine gerade quadratische Pyramide bauen lassen, bei der die Längen von Höhe, Grundkante und Seitenkante ganzzahlige Vielfache von 10 Königsellen sein sollen. Außerdem verlangt er, dass die Faktoren, mit denen die Vielfachen gebildet werden, drei aufeinanderfolgende Zahlen sind.

Man stelle fest, ob dies möglich ist. Sollte es der Fall sein, dann ermittle man für alle derartigen Pyramiden jeweils die Längen von Höhe, Grundkante und Seitenkante.

Hinweis: Es ist nicht gefordert, dass unbedingt die Höhe die kleinste und die Seitenkante die größte Länge hat.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

551213

Man bestimme alle Paare (a, b) positiver ganzer Zahlen, für die $(a+1)(b+1)$ durch ab teilbar ist.

551214

In einem Dreieck seien a und b die Längen der beiden kürzesten Seiten. Weiterhin mögen r und R den Inkreisradius beziehungsweise den Umkreisradius dieses Dreiecks bezeichnen. Man beweise die Ungleichung

$$ab > 4rR\,.$$